

DOI: 10.7652/xjtub201701013

亚网格内两相流动界面位置的精确定位算法

孙红霞^{1,2}, 苏军伟³

(1. 中国石油大学(华东)石油工程学院, 266580, 山东青岛; 2. 中国石化股份胜利油田分公司勘探开发研究院, 257015, 山东东营; 3. 西安交通大学人居环境与建筑工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对流体体积(VOF)法处理两相流动界面张力的虚拟流体方法无法准确确定亚网格内界面位置点的问题,提出了一种高精度的界面位置定位算法。该方法根据界面两侧单元界面曲度在亚网格内构建变曲度弧线,实现了两相界面的高精度近似,完成了网格单元中心连线和界面交点位置以及该位置的曲度的准确求取,成功地考虑了界面曲度对亚网格内界面位置的影响,同时方法本身不受网格类型及空间维度的限制。针对毛细管上升、静态液滴、二维气泡上升以及三维气泡上升等物理过程进行了模拟,结果表明:界面曲度对亚网格界面位置可产生显著影响;亚网格内界面位置的准确捕捉以及该位置点界面曲度的准确求取可以显著改善VOF方法的预测精度,模拟结果显示最好可提高3.5倍。该方法可为复杂结构内高表面张力驱动流提供新的预测手段。

关键词: 自由表面流;数值模拟;表面张力;流体体积法

中图分类号: O359 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)01-0079-09

A Sub-Grid Interface Locating Algorithm for Free Surface Two-Phase Flows

SUN Hongxia^{1,2}, SU Junwei³

(1. School of Petroleum Engineering, China University of Petroleum, Qingdao, Shandong 266580, China;

2. Exploration and Development Research Institute, Shengli Oilfield Branch Company, Sinopec, Dongying, Shandong 257015, China; 3. School of Human Settlements and Civil Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In ghost fluid method, for treating surface tension under the framework of volume of fluid (VOF), the exact location of fluid interface cannot be easily determined. In order to resolve such a problem, a new sub-grid interface locating algorithm is proposed in this work. In the new algorithm, a variable curvature curve, used to approximate the interface in sub-grid, is constructed based on the curvature of the two grid cells on both sides of the interface. As a result, the intersection point of the connection line of centers of interfacial cells and the interface is calculated accurately. The influence of the curvature on the interface location is taken into account. Moreover, this algorithm is independent on mesh type and space dimension. Numerical tests, including capillary rise, static droplet, bubble rise in two-dimensions and three-dimensions, show that interface curvature has a significant influence on the sub-grid interface location. Calculating the sub-grid interface location and the curvature at such a location with high accuracy can improve the numerical prediction of VOF method significantly, and by 3.5 times at the best. This method can provide a new tool for predicting physical behaviors of high surface tension driven flow in complex geometrical structures.

收稿日期: 2016-05-09。 作者简介: 孙红霞(1983—),女,副研究员;苏军伟(通信作者),男,讲师。 基金项目: 国家科技重大专项资助项目(2016ZX05011003-007);国家自然科学基金资助项目(21306145)。

网络出版时间: 2016-10-21

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20161021.1523.004.html>

Keywords: free surface flow; numerical simulation; surface tension; volume of fluid

在两相或者多相流体界面处存在有界面张力,该力的大小取决于界面的曲度及单位面积的界面能量。微尺度环境下界面曲度的突增使得该力成为两相或多相动力学行为的主控力之一,因此表面张力的准确计算是微尺度环境下多相流动行为准确预测的保障,也是目前微尺度多相流动研究的一个热点。从数值的观点来看,表面张力仅在界面处存在,具有奇异性,这种奇异性增加了该方法与 Navier-Stokes 方程耦合的难度。要准确计算该力,两相动力学行为以及界面位置的跟踪至关重要。目前,跟踪两相界面的方法主要分为 front tracking method (FTM)^[1], Level Set method^[2] 以及 volume of fluid (VOF)^[3]。FTM 使用网格点构建界面,使得界面位置能够准确确定,然而当拓扑变化较大时,该方法需要对网格进行大调整或者进行重建,增加了计算的难度。Level Set method 能够高精度跟踪拓扑变化并容易向三维扩充,然而由于数值精度的原因,求解过程中通常需要对 Level Set 函数进行重置。通过根据界面距离函数来完成两相跟踪,而并非流体本身的守恒律,使该方法不具有流体守恒性,造成质量损失。VOF 方法通过网格点体积分率的差异来表征两相位置及两相界面,计算过程能够保证计算过程中体积守恒,处理拓扑变化容易,并易向三维扩展,要高精度跟踪界面运动以减少界面本身的弥散,需要采用高精度求解算法或进行亚网格界面构建(非通过网格格点值的差异来表征界面位置,而是通过几何方法构建网格内的界面位置)。

在传统 VOF 模拟方法中,对表面张力处理的连续界面力(CSF)方法在高表面张力情形下,通常会产生非物理振荡速度。一般而言,非物理振荡主要由以下两个原因造成:①界面的位置以及该位置的界面法向量和曲度很难准确求取;② Navier-Stokes 离散过程中造成的压力和表面张力不平衡。第 1 个问题仍然是目前研究的热点问题,例如 Youngs 的有限差分法^[5]、ELVIRA 方法^[6] 和最小二乘法^[7] 用于提高界面法向的求取精度,CLSVOF 方法^[8-9] 和线性界面重建算法^[10-12] 是为了准确获取界面的位置,文献[4]中的算法则为了提高界面曲度的计算精度。针对第 2 个问题,文献[13]在虚拟流体方法(ghost fluid method)架构下,实现了压力和表面张力的平衡,在表面曲度计算准确的情况下,该方法可以将表面张力的计算精确到计算机精度。在

有限容积架构下,运用该方法需要计算横跨界面的两个网格单元中心连线与界面的交点和该交点的曲度,该位置的确定以及曲度的计算对表面张力的准确计算至关重要。在现有的基于虚拟流体方法计算表面张力时,相邻单元中心连线与界面位置的方法仅通过界面距离函数插值得到,并没有考虑界面曲度本身对交点求取的影响。

本文基于 VOF 框架,采用虚拟流体方法处理两相界面张力,提出一种亚网格内界面位置的确定方法,该方法考虑了亚网格内界面的曲度对单元中心连线和界面交点的影响,从而提高了交点的计算精度以及交点处界面曲度的计算精度。

1 数学模型

在 VOF 模拟架构下,采用混合平均的 Navier-Stokes 方程来描述两相运动,其连续性方程和动量方程可表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu \boldsymbol{\tau}) = -\nabla p_d + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

式中: ρ 和 μ 为两相的平均密度和动力黏性系数; p_d 为动态压力; $\mathbf{u}$ 为两相的平均速度。 χ 由下式计算

$$\chi = \chi_1 \alpha + (1 - \alpha) \chi_2 \quad (3)$$

式中: χ_1 和 χ_2 分别为相 1 和相 2 对应的属性量; α 为相 1 的体积分数。在后面的讨论中,相 1 称为主相,相 2 称为辅相。主相的体积分数在计算过程中通过方程(4)显式跟踪

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha) = 0 \quad (4)$$

方程(1)、(2)用于描述两相的运动过程,在两相界面需要另外附加如下边界条件

$$\left(p - 2\mu \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right)_1 - \left(p - 2\mu \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right)_2 = \sigma k \quad (5)$$

在界面两侧的压力差可以表示为

$$p_1 - p_2 = \sigma k - \left(2\mu \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right)_1 + \left(2\mu \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right)_2 \quad (6)$$

式中: σ 为两相的界面张力系数; k 为界面的曲度,其值的正负表示了界面的凸和凹,用下方方程描述

$$k = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \right) \quad (7)$$

从方程(6)可以看出,两相界面两侧的压力差来源于两部分:界面张力引起的压力差和黏性应力引

起的压力差。对界面张力引起的压力差分量,可通过在界面处附加跳跃界面条件来完成^[13],而对于黏性应力的贡献则在动量方程中直接考虑。因此,在对方程(6)处理的过程仅仅考虑表面张力引起的压力差,也就是拉普拉斯方程

$$p_1 - p_2 = \sigma k \quad (8)$$

式中: p_1 为主相侧的压力; p_2 为辅相侧的压力。应当指出,如果以相2为主相、相1为辅相,表达式(8)将变化为

$$p_2 - p_1 = \sigma k \quad (9)$$

同时,在利用式(7)计算界面曲度时,需要以相2(主相)的体积分数进行计算。从方程(8)、(9)可以看出,两相界面的表面张力使得界面处的压力出现了跳跃,跳跃值为 σk 。

2 求解算法

本文采用 PISO 算法实现速度和压力的解耦^[14]。将表面张力引起的压力差从实际压力中分离出来,方程(2)写成半离散形式为

$$a_p \mathbf{u} = \mathbf{A}_H - \nabla p_d - \nabla p_c \quad (10)$$

其中, a_p 为对方程(2)离散得到的系数矩阵对角线上的值,而 $\mathbf{A}_H$ 表示为

$$\mathbf{A}_H = \sum_N a_N \mathbf{u} + \mathbf{b} \quad (11)$$

式中: a_N 为对方程(2)离散过程中邻居节点对当前节点的隐式贡献系数; $\mathbf{b}$ 为除了压力以外的显式离散贡献; p_c 为表面张力存在引起的压力梯度。

方程(10)两边同除以 a_p 可得

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{A}_H}{a_p} - \frac{\nabla p_d}{a_p} - \frac{\nabla p_c}{a_p} \quad (12)$$

方程(12)得到的速度场应当满足连续性方程,将方程(12)代入到方程(1)可得

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{a_p} \nabla p_d \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{A}_H}{a_p} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{1}{a_p} \nabla p_c \right) \quad (13)$$

方程(13)即是通过 PISO 算法导出的压力方程,求解该方程可以得到新的压力,并代入到方程(12)可更新速度。本文离散过程采用的是基于同位网格的有限容积法,在更新体心速度的同时,需要更新单元交接面上流率,以便用于下一时刻的对流项的离散。表面流率采用方程(12)在面上的插值进行更新

$$\varphi_f = \left(\frac{\mathbf{A}_H}{a_p} \right)_f S_f - \left(\frac{\nabla p_d}{a_p} \right)_f S_f - \left(\frac{\nabla p_c}{a_p} \right)_f S_f \quad (14)$$

应当指出,无论在求解方程(13)还是方程(14)进行单元界面流率更新的时候,都需要计算表面张力引起的压力梯度 ∇p_c ,这在下一节进一步讨论。

3 表面张力的处理

3.1 处理表面张力的虚拟流体方法

方程(8)为在相界面处表面张力引起的压力差,本文采用虚拟流体方法将该方程显式地施加到压力方程中。图1为两相界面和网格单元的相对关系示意图,图中点划线为界面的位置, O 和 N 为相邻的两个单元的中心, S_f 为两个单元交界面的位置矢量, I 为 ON 的连线与相界面的交点, f 为 ON 连线与网格单元交接面的交点。由方程(8)可知,表面张力的作用使得主相侧的压力比辅相侧的压力要高 σk (k 可能为负值)。因此,点 O 在主相内或者点 N 在主相内,界面处的压力差存在方向的差异,可以通过主相的体积分数大小来确定 O 在主相还是 N 在主相。如果 $\alpha_O > \alpha_N$,则 O 在主相,否则 N 在主相。

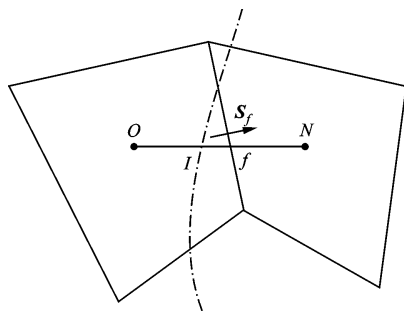


图1 相界面和网格单元关系图

当点 O 在主相中时,沿 ON 方向的压力分布可以用图2来表示。在求解方程(13)、(14)时,需要计算压力在交点 f 处的压力梯度(含有动压梯度和界面张力引起的压力梯度)。从图2中可以看出,在交点 f 处的压力梯度可以表示为

$$(\nabla p)_f = \frac{p_N - (p_O - \sigma k_I)}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O|^2} (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O) \quad (15)$$

方程(15)可以进一步写成如下形式

$$(\nabla p)_f = \frac{p_N - p_O}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O|^2} (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O) + \frac{\sigma k_I}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O|^2} (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O) \quad (16)$$

方程(16)右边第1项是由于动压力引起的压力梯度 $(\nabla p_d)_f$,第2项为表面张力引起的压力梯度 $(\nabla p_c)_f$,也就是方程(14)中 p_p 在面上的值。 k_I 为界面的曲度,通过下方方程计算

$$k_I = \frac{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_I|}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O|} k_O + \frac{|\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_I|}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O|} k_N \quad (17)$$

当点 N 在主相中时, ON 连线上的压力分布如图3所示。此时,交点 f 处的压力梯度可以写为

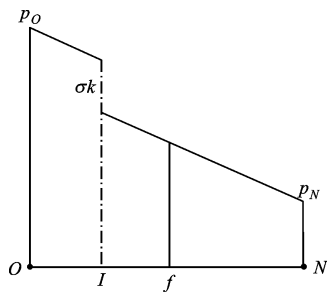


图2 点O在主相中时压力分布示意图

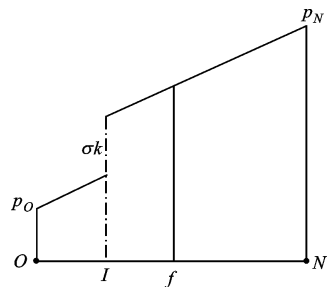


图3 点N在主相中时压力分布示意图

$$(\nabla p)_f = \frac{p_N - p_O}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O|^2}(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O) - \frac{\sigma k_l}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O|^2}(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O) \quad (18)$$

方程(18)右侧第1项是单元面上动压力梯度,第2项为单元面上界面张力压力梯度。

方程(16)、(18)可以统一写成如下形式

$$(\nabla p)_f = \frac{p_N - p_O}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O|^2}(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O) + \text{sig}(\alpha_O - \alpha_N) \frac{\sigma k_l}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O|^2}(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O) \quad (19)$$

式中: $\text{sig}(x)$ 为符号函数,如果 $x > 0$, $\text{sig}(x) = 1$, $x < 0$, $\text{sig}(x) = -1$ 。在求解方程(13)时,动压力在压力方程中进行隐式处理,而表面张力引起的压力梯度 ∇p_c 做显式处理。在方程(12)中使用到的压力是在网格单元中心的,可通过下面方程重建^[16]

$$\nabla p_c = (\sum_f \frac{1}{|\mathbf{S}_f|} \mathbf{S}_f \otimes \mathbf{S}_f)^{-1} (\sum_f \frac{1}{|\mathbf{S}_f|} \mathbf{S}_f ((\nabla p_c)_f \mathbf{S}_f)) \quad (20)$$

式中: f 为包含某一个单元的所有面; $\mathbf{S}_f$ 为所计算单元的面的面积矢量,指向单元外部。

3.2 界面位置的准确确定

上述基于虚拟流体法对表面张力进行处理,在求解压力方程时,界面网格单元中心与亚网格曲面交点位置的界面曲度即为方程(19)中的 k_l ,该值由交点的位置确定。界面曲度的准确确定关系到界面张力的植入精度,对降低界面附近的非物理振荡速

度至关重要,一般可以通过方程

$$\mathbf{r}_I = \frac{|\alpha_N - 0.5|}{|\alpha_N - \alpha_O|} \mathbf{r}_O + \frac{|\alpha_O - 0.5|}{|\alpha_N - \alpha_O|} \mathbf{r}_N \quad (21)$$

或者方程(22)来确定^[13]

$$\mathbf{r}_I = \frac{|d_N|}{|d_N| + |d_O|} \mathbf{r}_O + \frac{|d_O|}{|d_N| + |d_O|} \mathbf{r}_N \quad (22)$$

方程(21)中 α_O 和 α_N 分别为单元 N 和 O 的主相体积分,该方程近似认为主相体积分值为 0.5 的位置为两相界面,该方法植入较为简单,但是精度较差。方程(22)中 d_O 和 d_N 分别为单元 O 和 N 的中心到界面的距离,可以通过 Level Set method^[2] 或者界面重建^[10-12] 来获取。

应当指出,无论方程(21)或者方程(22)假设在单元 O 和 N 之间的界面为平面,并没有考虑界面的曲度对界面位置的影响。为了说明这一问题,图4给出了相邻单元界面曲度为同号时界面分布的示意图,图中 O 和 N 为单元 O 和 N 的中心,这两点的位置坐标分别为 $\mathbf{r}_O$ 和 $\mathbf{r}_N$,点划线为实际界面的分布, l_O 和 l_N 为重建的界面位置, O_f 和 N_f 分别为重建界面上离点 O 和 N 最近的点,点 E 是通过方程(22)计算的界面的位置, F 为界面在 ON 连线上的位置。VOF 方法是一种欧拉方法,无法直接获取亚网格内界面分布的信息,为此需要对亚网格内两相界面进行重建,重建过程涉及到对多面体的几何操作,通常可以将多面体切分成四面体以方便处理^[15]。点 O_f 和 N_f 都是界面上的点,假设点 G 为重建的界面与网格线的交点。基于这 3 个点可以局部构建一个弧线,该弧线的曲度通过下面方程来计算

$$k_G = \theta k_N + (1 - \theta) k_O \quad (23)$$

式中: θ 为线段 OG 和 ON 长度的比值。组成的弧线的圆心 C 可以用下面方程计算

$$\mathbf{C} = \theta(\mathbf{r}_N + R_N \mathbf{n}_N) + (1 - \theta)(\mathbf{r}_O + R_O \mathbf{n}_O) \quad (24)$$

式中: R_O 和 R_N 为点 O 和 N 的曲率半径,为两点曲率的倒数的 2 倍。由于点 G 也在该弧线上,所以点 G 和 C 的距离应该等于点 G 的曲率半径,则下面关系成立

$$|\mathbf{r}_O + \theta(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O) - \mathbf{C}| = |R_G| \quad (25)$$

将方程(24)代入到方程(25)可得

$$\left| \theta \left(d_N - \frac{2}{k_N} \right) \mathbf{n}_N + (1 - \theta) \left(d_O - \frac{2}{k_O} \right) \mathbf{n}_O \right| = \frac{2}{|\theta k_N + (1 - \theta) k_O|} \quad (26)$$

方程(26)是关于 θ 的方程,在 $[0, 1]$ 中取值。采用二分法进行求解后可以得到该值。

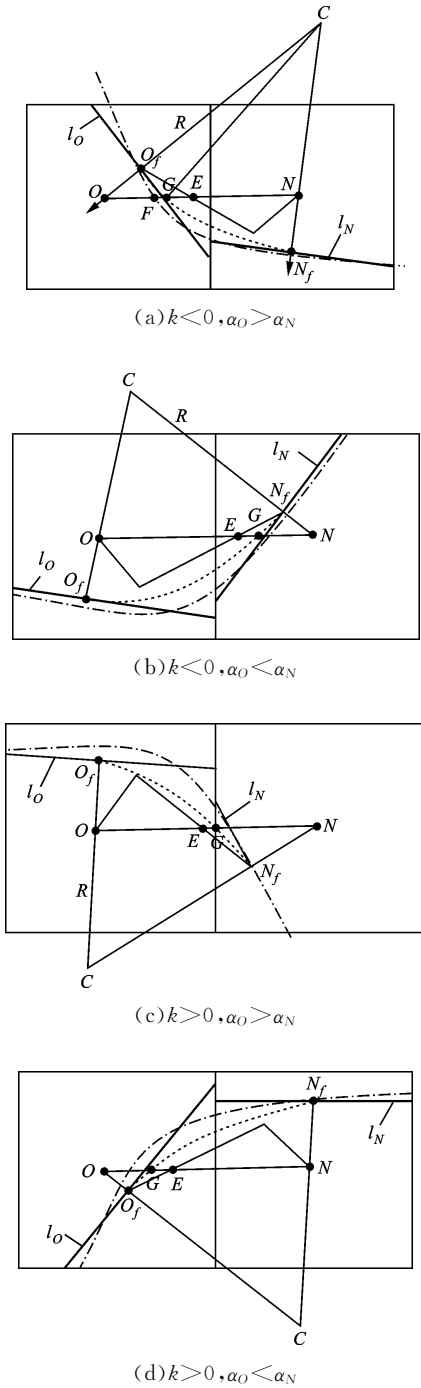


图 4 相邻单元界面曲度同号时界面位置分布图

对于相邻两个单元曲度的符号相异的情形可以用图 5 来表示。由于 N 和 O 处于等价的位置上,图 5 可以表示 $k_N < 0, k_O > 0$ 的情形。对于这种情形,首先找到曲度为 0 的点,然后沿着该点向 O 方向和 N 方向分别挪动一段距离得到点 O_R 和 N_L 。根据方程(23)求得两点的曲度,根据方程(26)计算 OO_R 和 NN_L 两条线段上和界面上可能的交点。如果界面和某一个线段相交则该交点即为求取的交点,如果界面在两个线段上同时有交点,则采用加权平均

的方式,即

$$\mathbf{r}_G = \theta \mathbf{r}_{G_N} + (1 - \theta) \mathbf{r}_{G_O} \quad (27)$$

式中: $\mathbf{r}_{G_N}$ 和 $\mathbf{r}_{G_O}$ 为界面与线段 NN_L 和 OO_R 交点的位置坐标。

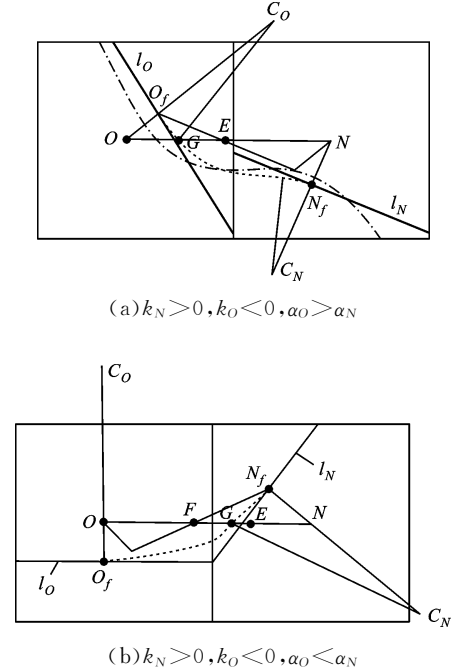


图 5 相邻单元界面曲度异号时界面位置分布图

4 算例验证

本文的算法植入到了开源计算流体力学软件 OpenFOAM 自由界面求解器 interFoam 中,最终开发得到的求解器和 interFoam 仅在界面张力的处理上存在差异。为了对本文算法的可行性和有效性进行验证,首先选择了毛细管上升算例和 interFoam 标准求解器进行比对,以证明本文方法优越性,接着利用静止气泡算例证明加入了本文的曲度修正策略较无曲度修正可以进一步提高计算精度,最后采用气泡上升算例进行测试,以表明该方法的工程利用价值。

4.1 毛细管

当亲水毛细管放置水中时,在表面张力驱动下,水会沿着毛细管上升,这是一种典型的由表面张力驱动的流动。最终运动静止时,水上升高度与毛细管的润湿角、表面张力系数以及毛细管半径满足如下关系

$$H = \frac{2\sigma \cos(\theta)}{\rho_w g r} \quad (28)$$

式中: θ 为润湿角,用来表征壁面的润湿性,在本算例中分别取为 25° 、 35° 、 45° 、 55° 和 65° ; σ 为界面张力

系数; ρ_w 为水的密度; g 为重力加速度; r 为毛细管半径。此算例计算域为高 2×10^{-2} m、宽 10^{-3} m 的长方形区域,宽度和高度网格的数目分别为 20 和 400,模拟过程中用到的参数如表 1 所示。

表 1 毛细管上升模拟用到的参数

$\rho_w /$ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\rho_a /$ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\mu_w /$ $\text{Pa} \cdot \text{s}$	$\mu_a /$ $\text{Pa} \cdot \text{s}$	$\sigma /$ $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	$g /$ $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
1 000	1	0.001	1.5×10^{-5}	0.070 7	10

为了验证本文算法理论可行和植入正确,选择 interFoam 结果和分析解结果作为对比,图 6 给出了不同壁面润湿性的情况下液柱的高度 H 的结果和 interFoam 的计算结果以便对比。从图中可以看出,本文方法的计算结果较 interFoam 更加接近分析解。表 2 给出了不同的润湿性条件下,本文结果和 interFoam 结果相对于分析解的误差以及本文算法相对于 interFoam 精度提高的倍数。从表中可以看出,润湿角越大本文算法的精度提高越多,精度最高相对于 interFoam 提高了 3.5 倍。网格较粗是造成强润湿性两种方法预测精度偏差的主要原因。

应当指出,本文算法和 interFoam 的唯一差别就在表面张力处理上,因此本算例相对于 InterFoam 的精度提高亦得益于此。这说明本文提出的算法可行且有效。

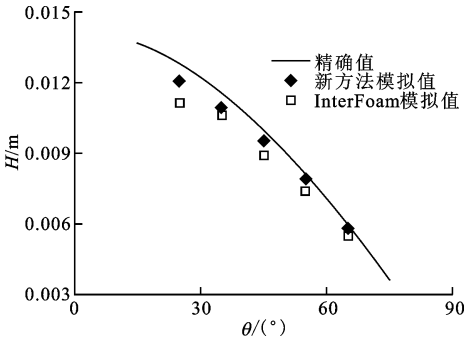


图 6 不同壁面接触角下液柱高度

表 2 不同壁面接触角下毛细管柱高度与精确解误差

方法	误差/%				
	25°	35°	45°	55°	65°
本文	5.77	5.67	4.2	2.34	1.67
interFoam	12.87	8.24	10.7	8.38	7.52
提高倍数	1.23	0.45	1.55	2.58	3.50

4.2 静态液滴

静态液滴是表面张力驱动流动的测试另一重要算例之一。对文献[17]中的算例进行了模拟验证,

分析了表面张力作用下对方形区域内流体的作用,其中方形区域的边长为 2 m,存在两种流体,其中一种流体的初始化区域为边长 1 m 的正方形,正方形中心位于方形区域中心,如图 7 所示,图中黑色的部分为初始液滴的形态。在表面张力的作用下,液滴会振荡变形,最终静止时候为圆形。本算例使用的物性参数如表 3 所示。

表 3 静态液滴模拟用到的物性参数

$\rho_1 / \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\rho_2 / \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\mu_1 / \text{Pa} \cdot \text{s}$	$\mu_2 / \text{Pa} \cdot \text{s}$	$\sigma / \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$
1	1	0.5	0.5	1

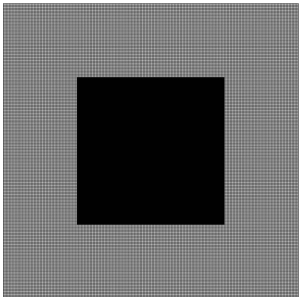


图 7 初始时刻液滴在空间的分布

根据拉普拉斯定律可知,当流场达到稳定时,内部流体的压力和外部流体的压力存在恒定的压力差,其数值为 $(p - p_0) p_0^{-1} = 1.772$ (液滴外流体为平均压力 $\bar{p}$, $p_0 = 10^5$ Pa 为参考压力)。本文算法的压力计算结果如图 8 所示(图中黑色部分压力为 2.772×10^5 Pa,灰色部分的压力为 10^5 Pa),可以看出压力明显地分为两个区域,且两个区域的界面清晰,这主要得益于本文采用的虚拟流体方法对表面张力进行处理。图 9 所示为圆中心的水平线上的压力随 x 的变化,采用本文提出的曲度修正方法计算出来的压力要明显好于直接通过距离进行曲度插值(方程(17))的算法。沿着过中心的水平线 x 方向上分别对圆形内部区域和圆形外部区域的压力进行平均,并计算两者的压力差与分析解进行比对发现,

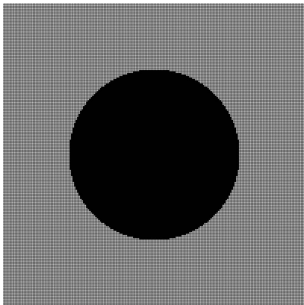


图 8 液滴最终静止时压力的分布

采用距离插值加曲率修正(本文算法)得到的结果相对于分析解的误差为 4.23%,无曲率修正的传统方法的误差为 7.31%,提高倍数约为 1.73。这说明本文对插值后交点位置加上曲率修正可显著提高计算精度。

4.3 二维气泡上升

表面张力对气泡上升过程中形态的变化起着重要的作用,单个气泡上升过程的预测精度能够反映出表面张力计算精度。本算例针对气泡上升过程进行模拟,算例采用和文献[18]相同的设置。计算域为二维长方形,宽为 0.254 m、高为 0.304 8 m,气泡半径 $R=0.025\ 4\ \text{m}$,气泡中心距离长方形计算域底部 $0.101\ 6\ \text{m}$ 。宽度和长度方向的网格剖分个数分别为 200 和 240,物性参数如表 4 所示。

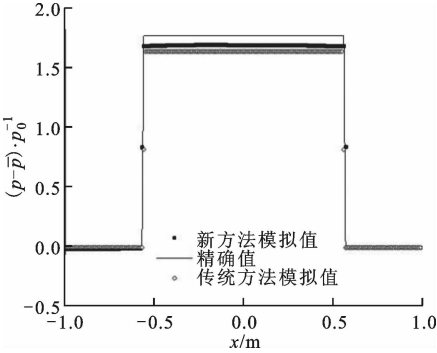


图 9 $y=0$ 线上压力沿 x 的分布

图 10 给出了不同时刻气泡的形状,可以看出,开始圆形的气泡在浮力的作用下不断上升并伴随着形态的改变,随着气泡上升的时间越长,气泡的形状变化越剧烈,并在 0.212 5 s 后气泡逐渐分裂,在不同时间下模拟得到的气泡形状与实验结果吻合得较好。

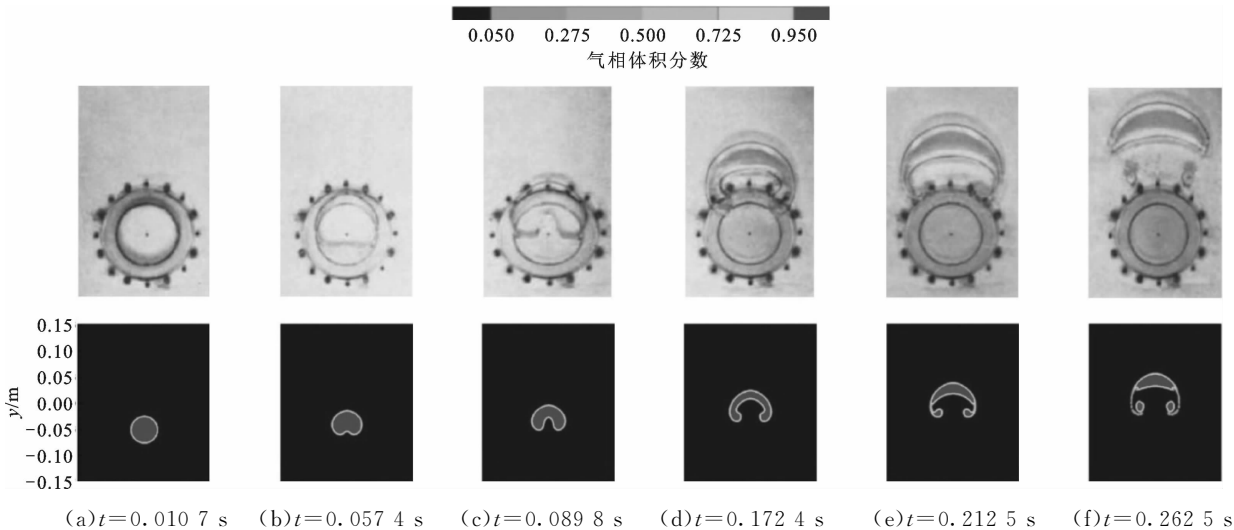


图 10 不同时刻的气泡形状

表 4 二维单个气泡上升算例模拟用到的物性参数

$\rho_w /$ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\rho_b /$ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\mu_w /$ $\text{Pa} \cdot \text{s}$	$\mu_b /$ $\text{Pa} \cdot \text{s}$	$\sigma /$ $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	$g /$ $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
1 000	1	0.001	1.77×10^{-5}	0.072 8	9.8

为进一步证明算法的有效性,对气泡上浮过程中气泡顶部的无量纲位移 $S((dR^{-1})^{0.5}, d$ 为实际位移)随着无量纲时间 $t((gR^{-1})^{0.5})$ 的变化进行分析,结果如图 11 所示,可以看出本文算出的结果和实验 1 及实验 2 结果^[19]吻合较好,说明本文方法对气泡上述过程中气泡顶端的速度有较好的预测。图 12 给出了气泡轴心无量纲厚度 $H((0.5TR^{-1}), T$ 为实际厚度)随无量纲时间的变化。与实验结果比对发现,随着时间的推移,模拟得到的结果有轻微的增大,但模拟结果的总体趋势与实验数据符合良好,进一步验证了算法的正确性。

4.4 三维气泡上升

本算例主要对三维空间的气泡上升过程进行模拟,以验证本文算法在三维空间模拟的适应性。本文采用了文献[20]给出的实验结果进行比对,文献将密度分别采用雷诺数 ($Re = \rho_l u_b d_b u_l^{-1}$)、莫顿数 ($Mo = g \mu_l^4 \rho_l^{-1} \sigma^{-3}$) 以及埃奥特沃斯数 ($EO = \rho_l g d_b^2 \sigma^{-1}$) 来表征单个气泡在黏性液体中的形状。本文对文献中的两组实验(情形 1: $EO=116$ 和 $Mo=848$;情形 2: $EO=116$ 和 $Mo=5.51$)采用本文算法进行了验证。计算区域为 $8\ \text{m} \times 8\ \text{m} \times 8\ \text{m}$,气泡中心初始位置在($x=4\ \text{m}, y=4\ \text{m}, z=1.5\ \text{m}$),气泡的直径 d_b 为 1 m, x, y, z 三个方向的网格尺度为 $0.05(=d_b/20)$ 。液气动力黏性系数比 μ_l/μ_g 为

100,密度比 ρ_l/ρ_g 为 1 000。

针对两种测试条件下进行模拟得到的最终雷诺数以及对应的气泡形状和文献[20]的实验结果进行对比如表 5 所示,可以看出本文的模拟结果和实验结果吻合较好。对情形 1,模拟得到的雷诺数相对于实验的误差为 5.3%,而对于情形 2,模拟得到的

雷诺数相对于实验的误差为 8.1%。从气泡形态来看,本文模拟得到的气泡相对于实验得到的图像中心略高,而两侧略低,但总体形态和实验结果保持一致。应当指出,对于三维气泡形态而言,截取视角的不同可能会对气泡形态产生视觉差异,气泡沿着 y 轴正向运动,本文截取视角为 $-z$ 方向。

表 5 三维气泡上升过程的模拟结果和实验结果对比

编号	Eo	Mo	$Re^{[20]}$	Re	气泡形状 ^[20]	气泡形状
1	116	5.51	13.3	12.6		
2	116	848	2.47	2.27		

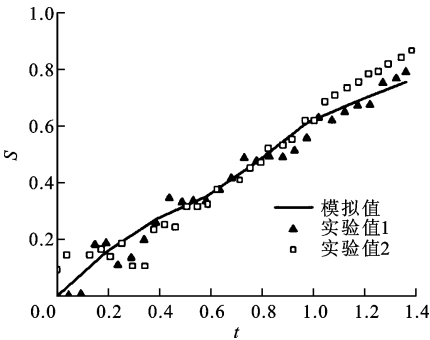


图 11 气泡顶部位移随时间变化

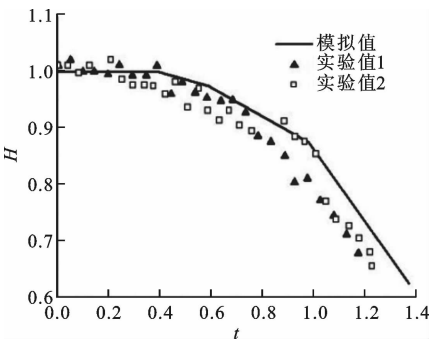


图 12 气泡轴心厚度随时间变化

5 结 论

针对 VOF 方法架构下运用连续界面力方法处理界面张力时存在的不足,本文基于虚拟流体方法对界面张力进行了处理。考虑到虚拟流体法需要准确求取跨界面网格中心连线与界面的交点问题,本文提出了一种新的亚网格内两相流动界面位置的求取方法。与传统的直接通过距离插值得到界面交点

位置的方法不同,本文算法通过界面两侧单元中心到界面的距离以及界面的法向,计算出离单元中心最近的界面点的位置,接着根据这两个位置以及界面的曲率在跨界面的两单元之间构建变曲度弧线,实现了变曲度界面的重建,最终将跨界面网格单元连线与该重建界面的交点作为该连线与真实界面的交点。该方法考虑了界面曲度对界面交点位置的影响,使得该点位置求取更加精确,为表面张力处理过程中交点处界面属性的高精度求取提供了保证。该方法还为亚网格内界面重构提供了新的思路,并为带有自由界面的两相或多相流动问题的高精度跟踪奠定了基础。

对毛细管上升过程、静止液滴、二维气泡上升和三维气泡上升过程进行的测试表明:本文算法相对于传统处理方法具有更高的精度,算法不受维度的限制且具有较强的可操作性,稳定性强,具有良好的工程应用前景。

参考文献:

[1] UNVERDI S O, TRYGGVASON G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows [J]. Journal of Computational Physics, 1992, 100(1): 25-37.

[2] SUSSMAN M, SMERKA P, OSHER S. A Level Set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow [J]. Journal of Computational Physics, 1994, 114(1): 146-159.

[3] HIRTC W, NICHOLSB D. Volume of fluid (VOF)

- method for the dynamics of free boundaries [J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 39(1): 201-225.
- [4] COQUERELLE M, GLOCKNER S. A fourth-order accurate curvature computation in a level set framework of two-phase flows subjected to surface tension forces [J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 305(1): 838-876.
- [5] YOUNGS D L. An interface tracking method for a 3D Eulerian hydrodynamics code: technical report 44/92/35 [R]. Berks, UK: AWRE, 1984: 3-9.
- [6] EDWARD P J J, GERRY E P. Second-order accurate volume-of-fluid algorithms for tracking material interfaces [J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 199(2): 465-502.
- [7] SCARDOVELLI R, ZALESKI S. Interface reconstruction with least-square fit and split Eulerian-Lagrangian advection [J]. *Int J Numer Meth Fluids*, 2003, 41(3): 251-274.
- [8] SUSSMAN M, GERRY E P. A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3d and axisymmetric incompressible two-phase flows [J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 162(2): 301-337.
- [9] BALCÁZAR N, ORIOL L, JOFRE L, et al. A coupled volume-of-fluid/level-set method for simulation of two-phase flows on unstructured meshes [J]. *Computers & Fluids*, 2016, 124(1): 12-29.
- [10] SCARDOVELLI R, ZALESKI R. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow [J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1999, 31(1): 567-603.
- [11] DIOT S, FRANCOIS M M. An interface reconstruction method based on an analytical formula for 3D arbitrary convex cells [J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 305(15): 63-74.
- [12] LÓPEZ J, HERNÁNDEZ J, GÓMEZ P, et al. A new volume conservation enforcement method for PLIC reconstruction in general convex grids [J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 316(1): 338-359.
- [13] FRANCOIS M M, CUMMINS S J, DENDY E D, et al. A balanced-force algorithm for continuous and sharp interfacial surface tension models within a volume tracking framework [J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 213(1): 141-173.
- [14] ISSA R I. Solution of the implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting [J]. *Journal of Computational Physics*, 1985, 62(1): 40-65.
- [15] SU J, Gu Z L, CHEN C G, et al. A two-layer mesh method for discrete element simulation of gas-particle systems with arbitrarily polyhedral mesh [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015, 103(10): 759-780.
- [16] OpenCFD Ltd. OpenFOAM [CP/OL]. [2016-03-20]. www.openfoam.com.
- [17] ADAMI S, HU X Y, ADAMS N A. A new surface-tension formulation for multi-phase SPH using a reproducing divergence approximation [J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(13): 5011-5021.
- [18] 孙鹏楠, 李云波, 明付仁. 自由上浮气泡运动特性的光滑粒子流体动力学模拟 [J]. *物理学报*, 2015, 64(17): 1747011-1747015.
- SUN Pengnan, LI Yunbo, MING Furen. Numerical simulation on the motion characteristics of freely rising bubbles using smoothed particle hydrodynamics method [J]. *Acta Phys Sin*, 2015, 64(17): 1747011-1747015.
- [19] WALTERS J K, DAVIDSON J F. The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid: Part 1 The two-dimensional bubble [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1962, 12(3): 408-416.
- [20] BHAGA D, WEBER M E. Bubbles in viscous liquids: shapes, wakes, and velocities [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, 105(1): 61-85.

[本刊相关文献链接]

- 王宁宁, 刘海湖, 张楚华. 液桥重开过程的两相格子 Boltzmann 模型及计算. 2016, 50(9): 101-105. [doi: 10.7652/xjtuxb201603016]
- 范小军, 李亮, 李森, 等. 平板和静叶表面气流-水膜耦合流动特性的数值研究. 2016, 50(11): 101-105. [doi: 10.7652/xjtuxb201603016]
- 朱晓静, 毕勤成. 垂直上升内螺纹管中高压汽-水两相流截面含汽率的测量. 2015, 49(3): 61-66. [doi: 10.7652/xjtuxb201510010]
- 曹文瑾, 孙中国, 席光. 系泊型浮体运动的无网格法数值模型. 2015, 49(3): 65-71. [doi: 10.7652/xjtuxb201501011]
- 施东晓, 毕勤成, 周荣启. 磁性液体两相界面演变特性的数值研究. 2014, 48(9): 112-116. [doi: 10.7652/xjtuxb201409019]
- 李涛, 宗潇, 杨小平, 等. 矩形通道内高速蒸汽与过冷水直接接触凝结换热流型的实验研究. 2014, 48(5): 128-135. [doi: 10.7652/xjtuxb201408022]
- 王太, 李会雄, 李阳. 同轴两个气泡融合特性的数值研究. 2013, 47(7): 99-103. [doi: 10.7652/xjtuxb201305018]

(编辑 荆树蓉)